3) a) $k \geq 2$.

* pour $k \leq t \leq k+1$ on a : $f(t) \leq f(k)$ (car f est décroissante)

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).[k+1-k]$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \quad (1)$$

* pour $k-1 \leq t \leq k$ on a : $f(k) \leq f(t)$

$$\Rightarrow \int_{k-1}^{k} f(k).dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

b) pour $k \geq 2$

$$\int_k^{k+1} f(t).dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = S_n - f(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(t).dt = \int_2^{n+1} f(t)dt$$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t).dt = \int_1^{n} f(t)dt$$

d'où $\int_2^{n+1} f(t).dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^{n} f(t).dt$

c) $f(1)=1$

$$\int_1^{n} f(t).dt \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \int_2^{n+1} f(t).dt \geq 0$$

d'où $0 \leq S_n - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + .. + \frac{1}{n^3}$$

(S_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$

elle est donc convergente ; soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$$1 \leq S_n \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq \ell \leq \frac{3}{2}$$

EX 28 :

1) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

$I = [-1,3]$

$$\overline{f} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{4} \times \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3} = \frac{41}{5}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 1$

$I = [2,4]$

$$\overline{f} = \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2} - x\right]_{2}^{4} = \frac{-61}{64}$$

3) $f(x) = \sin(2x)$

$I = [0,\pi]$

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\pi} = 0$$

EX 29 :

soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$; $x \in [2,4]$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)} < 0 \ ; \ \forall x \in [2,4]$$

f est décroissante

$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(4) \leq f(x) \leq f(2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$$

f est continue sur $[2,4]$ et $\frac{1}{13} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$

d'où $\frac{1}{13} \leq \overline{f} \leq \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \leq \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)dx \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{13} \leq \int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2}{3}$$

EX 30 :

soit $f(x) = \frac{1}{3 + tg^2 x}$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq tgx \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq tg^2 x \leq 3 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq 3 + tg^2 x \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{3}{10}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn